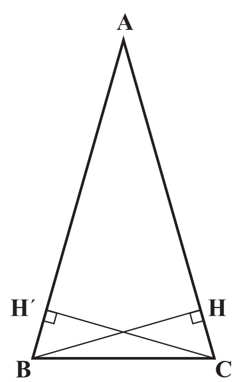
آموزشی

هوشنگ شرقی

استدلال‌های آسان به کمک مساحت‌ها

یکـــی از روش‌های جالـــب برای اســـتدلال و اثبات در هندســـه، اســـتفاده از مفهوم مساحت است و یکی از راهبردهای این روش، راهبرد تعیین مســـاحت از دو راه و معادل قرار دادن آن‌هاســـت. در مقالهٔ حاضر به کمک نمونه‌هـــای زیر این روش را می‌آموزیـــد و در ادامه چند مثال دیگر را که به اتکای مفهوم مساحت به استدلال در هندسه می‌پردازند، ملاحظه می‌کنید.

مثـــال ۱. ثابت کنید هر مثلثی کـــه دو ارتفاع برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

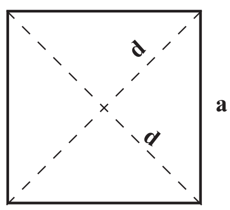


حل: می‌دانیم کـــه در مثلث ABC ارتفاع‌های BH و CH´ برابرنـــد (فـــرض: BH=CH´ و $\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ$) می‌خواهیـــم ثابت کنیـــم: AB=AC. احتمالاً بیشـــتر دانش‌آمـــوزان برای اثبات برابری دو پاره‌خط AB و AC به سراغ استفاده از هم‌نهشتی دو مثلث مناسب می‌روند و البته با این روش مســـئله قابل حل اســـت. اما با توجه به وجود ارتفاع‌ها، به مفهوم مســـاحت نزدیک می‌شویم. بیایید مساحت مثلث ABC را از دو راه به‌دست آوریم و با هم مساوی قرار دهیم:

$$\begin{cases} S_{ABC}=\frac{۱}{۲}...\times... \\ S_{ABC}=\frac{۱}{۲}...\times... \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲}...\times...=\frac{۱}{۲}...\times...$$

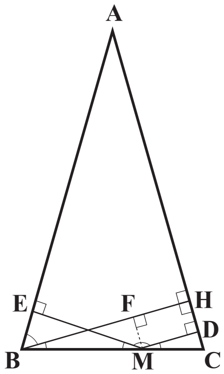
و با توجه به فرض BH=CH´، نتیجه می‌شود: ... = ...
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این روش استدلال ساده‌تر است.

مثال ۲. بدون اســـتفاده از قضیهٔ فیثاغورس نشـــان دهیـــد که در هر مربع، طـــول قطر، $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع است.



حل: مساحت مربع به ضلع a برابر است با: $S=a^۲$. امـــا می‌دانیم که مربع نوعی لوزی اســـت که زوایای آن قائمه‌اند. پس به کمک دســـتور مساحت لوزی داریم: $S=\frac{d\times d}{۲}=\frac{d^۲}{۲}$. اکنون با مساوی قرار دادن دو مقدار S، درستی حکم را نتیجه بگیرید.

مثال ۳. ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الســـاقین، مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دلخواه روی قاعدهٔ مثلث از دو ساق مثلث، مساوی ارتفاع وارد بر ساق است.

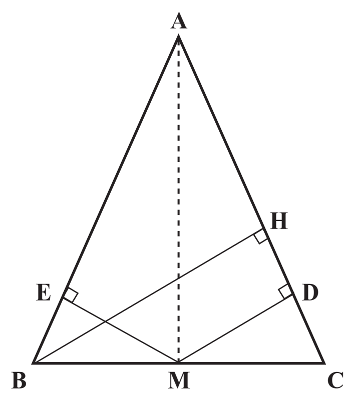


یکی از روش‌های جالب برای استدلال و اثبات در هندسه، استفاده از مفهوم مساحت است و یکی از راهبردهای این روش، راهبرد تعیین مساحت از دو راه و معادل قرار دادن آن‌هاست

حـل: چون ارتفاع‌های وارد بر دو ساق مثلث با هم مساوی‌اند، پس می‌توانیم ارتفاع وارد بر هر یک از دو ساق، مثلاً BH را در نظر بگیریم. برای هر نقطهٔ دلخواه M روی قاعدهٔ BC باید ثابت کنیم: MD+ME=BH.

اگر بخواهیم این مسئله را به کمک هم‌نهشتی مثلث‌ها ثابت کنیم، یک راه این است که از M مطابق شکل، عمود MF را بر BH رسم کنیم. MDHF چه نوع چهارضلعی است؟ MD با کدام پاره‌خط مساوی است؟ پاره‌خط‌های CH و MF چرا موازی‌اند؟ چرا $F\hat{M}B = \hat{C}$ و چرا $F\hat{M}B = \hat{B}$؟ نشان دهید مثلث‌های FMB و EMB هم‌نهشت‌اند و از آنجا نتیجه بگیرید: ME=FB و سپس درستی حکم را نتیجه بگیرید.

همان‌طور که می‌بینید، این استدلال طولانی و دشوار است و راهبرد مساحت‌های برابر، کار را واقعاً آسان می‌کند. مطابق شکل از A به M وصل می‌کنیم. مساحت مثلث ABC را از دو راه بنویسید:



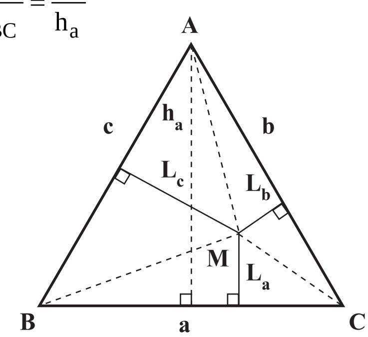
$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times BH \times ... \\ S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC} = \frac{۱}{۲} ... \times ... + \frac{۱}{۲} ... \times ... \end{cases}$$

حال با مساوی قرار دادن این دو مساحت و با توجه به برابری AC و AB، حکم را ثابت کنید.

مثـال ۴. در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه M را درون مثلث در نظر می‌گیریم. اگر فاصلهٔ این نقطه از سه ضلع مثلـث، L_a، L_b و L_c و ارتفاع‌هـای مثلث نیز h_a، h_b و h_c باشند، ثابت کنید: $\frac{L_a}{h_a} + \frac{L_b}{h_b} + \frac{L_c}{h_c} = ۱$.

حـل: از M بـه سـه رأس مثلث وصـل می‌کنیم. می‌دانیم که اگر دو مثلث قاعده‌های برابری داشته باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها به نسبت ارتفاع‌های آن‌هاست. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{L_a}{h_a}$$



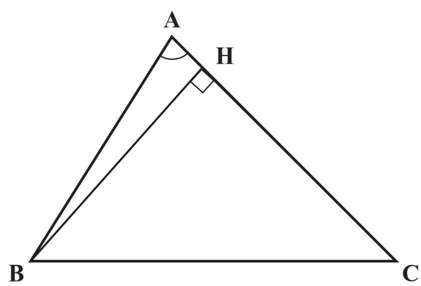
و به‌همین ترتیب: $\frac{L_c}{h_c}=\frac{...}{...},\frac{L_b}{h_b}=\frac{...}{...}$

اکنون با جمع‌کردن این سه تساوی با یکدیگر درستی حکم را نشان دهید.

■ تمرین

۱. ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، برابر است با ارتفاع مثلث.

۲. ثابت کنید مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب هر دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین این دو ضلع.

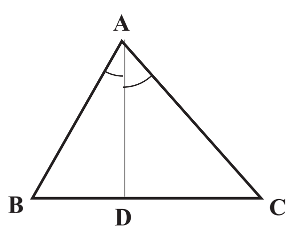


راهنمایی: *در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، sinA را بنویسید و از آنجا BH را به‌دست آورید. سپس به کمک مساحت مثلث از روی ارتفاع BH و قاعدهٔ AC، نتیجه بگیرید:* $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$*. و به‌همین‌ترتیب:*

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}...\times...\times\sin B=\frac{1}{2}...\times...\times\sin C$$

۳. در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A است. به کمک دستوری که در تمرین ۲ ثابت شد، مساحت مثلث‌های ABC، ADC و ABD را با توجه به رأس A بنویسید. سپس با توجه به اینکه $S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD}$ و به کمک دستور مثلثاتی $\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$ ثابت کنید:

$$AD=\frac{2AB.AC.\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}$$

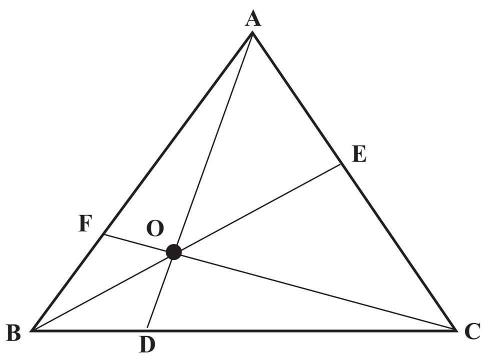


توجه کنید که این دستوری برای محاسبهٔ طول نیمساز یک زاویه در هر مثلث به کمک اندازه‌های اضلاع آن زاویه و اندازهٔ آن زاویه است.

۴. ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر چهارضلعی، در سینوس زاویهٔ بین دو قطر (***راهنمایی:*** *از دستور تمرین ۲ و تجزیهٔ چهارضلعی به چهار مثلث استفاده کنید.*) در حالتی که قطرها بر هم عمود باشند، این دستور به چه صورت درمی‌آید؟

۵. به کمک مسئلهٔ ۳ و نتیجهٔ آن، ثابت کنید هرگاه در مثلث ABC، $\hat{A}=120^\circ$ و AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ باشد، آن‌گاه: $\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

۶. در مثلث ABC سه پاره‌خط دلخواه AD، BE و CF در نقطهٔ O همرس‌اند. مطابق نمونه، جاهای خالی را پر کنید:



$$\frac{BD}{CD}=\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}},\frac{BD}{CD}=\frac{S_{OBD}}{S_{OCD}}$$

$$\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{S_{ABD}-S_{OBD}}{S_{ACD}-S_{OCD}}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{...}{...},\frac{CE}{EA}=\frac{...}{...}\Rightarrow\frac{CE}{EA}=\frac{...-...}{...-...}=\frac{...}{...}$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{...}{...},\frac{AF}{FB}=\frac{...}{...}\Rightarrow\frac{AF}{FB}=\frac{...-...}{...-...}=\frac{...}{...}$$

$$\Rightarrow\frac{BD}{CD}\times\frac{CE}{EA}\times\frac{AF}{FB}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}\times\frac{...}{...}\times\frac{...}{...}=1$$

توجه کنید که رابطهٔ فوق برای هر سه پاره‌خط همرس در مثلث برقرار است و به «قضیهٔ سه‌وا» شهرت دارد. عکس این قضیه هم برقرار است و کاربردهای زیادی هم دارد.